Universitatea din Bucureşti
Şcoala Doctorală

Teză de abilitare

-rezumat-

Homological and combinatorial tools in the study of algebras

Dumitru Ioan Stamate

Teză elaborată în vederea obţinerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

Bucureşti, iunie 2020

Această teză de abilitare conţine rezultate obţinute de autor, singur sau în colaborare, după susţinerea tezei de doctorat în 2009. Cadrul cercetărilor este algebra comutativă. Domeniul îsi are rădăcinile în lucrările lui Hilbert de la sfârşitul secolului al XIX-lea, şi ulterior a evoluat stimulat de interacţiunea cu geometria algebrică şi cu teoria numerelor.

În ultimele decenii algebra comutativă beneficiază de tehnici şi întrebari noi din combinatorică, algebră omologică şi teoria reprezentărilor care i-au lărgit spectrul de aplicaţii. Creşterea susţinută a puterii de calcul a venit în paralel cu o dezvoltare rapidă a algoritmilor şi a programelor de calcul simbolic.

În cercetările mele am folosit atât abordări teoretice, dar şi computaţionale pentru a studia probleme despre syzygii sau unele clase speciale de inele. Această teză este alcătuită din cinci capitole şi o listă de referinţe bibliografice. În continuare vom descrie rezultatele principale, pe capitole.

În primul capitol analizăm proprietatea Koszul şi aspecte conexe pentru inelul semigrupal asociat unui semigrup numeric. Fie K un corp arbitrar, H un semigrup numeric n-generat, iar $K[H]$ inelul toric asociat. Obţinem margini efective pentru multiplicitatea $e(H)$ în situaţia în care inelul graduat asociat (numit şi conul său tangent) $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este definit prin relaţii pătratice. Descriem în funcţie de operaţii de lipire semigrupurile Koszul care sunt intersecţie completă. În plus, pentru unele clase de semigrupuri numerice de interes în literatură (progresii aritmetice, compuse, intersecţii complete speciale, 3-semigrupuri, 4-semigrupuri simetrice sau pseudo-simetrice) le clasificăm pe cele care sunt Koszul.

Să presupunem că $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este definit prin relaţii pătratice. Demonstrăm că dacă $n < 5$, atunci $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este inel Cohen-Macaulay, iar pentru cazul $n = 5$ descriem explicit acele semigrupuri H pentru care $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ nu este Cohen-Macaulay. Drept aplicaţie arătăm că atunci când K este corp algebric închis şi de caracteristică diferită de doi, iar $n \leq 5$, atunci $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este inel Koszul dacă şi numai dacă (eventual după o schimbare de coordonate) idealul său de definiţie are o bază Gröbner pătratică.

În capitolul al doilea studiem numerele Betti pentru inelul semigrupal asociat unui semigrup numeric şi pentru conul său tangent. Fie $\mathbf{a} = a_1 < \cdots < a_r$ un şir de întregi pozitivi, iar prin $H_{\mathbf{a}}$ să notăm semigrupul generat de $a_1, \ldots, a_r$. Pentru orice întreg $k \geq 0$ notăm cu $\mathbf{a} + k$ şirul translatat $a_1 + k, \ldots, a_r + k$. Se arată ca pentru toţi întregii k suficient de mari conul tangent al inelului semigrupal $K[H_{\mathbf{a}+k}]$ este Cohen–Macaulay şi are aceleaşi numere Betti precum $K[H_{\mathbf{a}+k}]$.

Drept consecinţă, arătăm că numărul de ecuaţii ce definesc conul tangent al unui semigrup numeric este mărginit superior de o valoare ce depinde doar de lărgimea acelui semigrup, unde prin lărgime a unui semigrup numeric înţelegem diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic element din sistemul minimal de generatori ai semigrupului. De asemenea, conjecturăm o margine superioară pentru acest număr de ecuaţii, şi o verificăm în anumite cazuri.

În continuare, demonstrăm că pentru anumite familii de ideale torice intersecţie completă ce provin din aceeaşi familie translatată de semigrupuri numerice, o intersecţie arbitrară de elemente dintr-o aceeaşi familie va fi tot un ideal intersecţie completă.

În capitolul al treilea aprofundăm studiul proprietăţilor asimptotice la familia translatată a unui semigrup numeric cu puţini generatori. Fie $a < b$ întregi pozitivi, iar pentru orice întreg pozitiv k considerăm semigrupul $H_k = \langle k, a+k, b+k \rangle$. Pentru K corp, studiem relaţiile ce definesc inelul semigrupal $K[H_k]$ şi conul său tangent $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} K[H_k]$ atunci când $k \gg 0$. Aşa cum am discutat în Capitolul 2, rezultate recente indică faptul că numerele lor Betti sunt eventual periodice în k. În acest capitol oferim un prag $k_{a,b}$ sensibil mai bun decat cel cunoscut anterior de la care acest fenomen are loc, şi de asemenea descriem cum se modifică periodic ecuaţiile lor de definiţie. Găsim explicit toate valorile $k > k_{a,b}$ pentru care se obţin intersecţii complete, ajustând şi completând un rezultat al lui Jayanthan şi Srinivasan. Aflăm rezoluţia liberă minimală a lui $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} K[H_k]$ şi demonstrăm că regularitatea sa devine o funcţie cuasiliniară pentru $k > k_{a,b}$.

Capitolul al patrulea arată relevanţa idealului urmă a modulului canonic la studiul inelelor Gorenstein, ceea ce ne permite să introducem o nouă subclasă de inele Cohen-Macaulay. Urma modulului canonic (urma canonică) determină locusul non-Gorenstein pentru un inel local Cohen-Macaulay. Un inel local Cohen-Macaulay îl numim nearly Gorenstein dacă urma sa canonică conţine idealul maximal. O definiţie similară poate fi formulată pentru K-algebre graduate Cohen-Macaulay. Studiem urma canonică pentru produse tensoriale şi produse Segre de algebre, precum şi pentru subalgebre Veronese (libere de pătrate). Aceste rezultate ne permit să caracterizăm combinatorial inelele Hibi care sunt nearly Gorenstein. Căutăm conexiuni între clasa inelelor nearly Gorenstein şi clasa celor almost Gorenstein. Demonstrăm că în dimensiune unu prima clasă o include pe cea de-a doua.

În Capitolul 5, ultimul al lucrării, prezentăm o serie de întrebări, probleme deschise şi direcţii de cercetare pe care dorim să le abordăm şi care vin în continuarea rezultatelor descrise mai sus.